تمرین سری هشتم الکترومغناطیس — شرایط مرزی + خرایت خودالقایی و القای متقابل

۱. یک کره به شعاع a به طور دائم با بردار مغناطیس شوندگی $\vec{M}=M_0\hat{a}_z$ مغناطیس شده است. میدان مغناطیسی در مرکز کره را بدست آورید.

حل: چگالی حجمی جریان های مغناطیسی صفر است زیرا $\vec{\nabla}\times\vec{M}=0$ اما چگالی سطحی جریان عبارتست از:

$$J_{ms}=\vec{M}\times\hat{a}_r = M_0\,\hat{a}_z\times\hat{a}_r = M_0\sin\theta\,\hat{a}_\varphi$$

اگر نوار دایره‌ای به شعاع r و به فاصله h از مرکز کره در نظر بگیریم میدان ناشی از آن عبارتست از:

$$dH=-\frac{dI\,r^2\hat{a}_z}{2(r^2+h^2)^{3/2}}=\frac{(M_0\sin\theta)(a\,d\theta)(a^2\sin^2\theta)}{2a^3}\hat{a}_z$$

$$dH=\frac{M_0\sin^3\theta\,d\theta}{2}\hat{a}_z \longrightarrow H=\int_0^{\pi}\frac{M_0}{2}\sin^3\theta\,d\theta\,\hat{a}_z$$

$$\vec{H}=\frac{M_0}{2}\hat{a}_z\left(\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(3\sin\theta-\sin 3\theta)\,d\theta\right)=\frac{M_0}{2}\hat{a}_z\left(2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)\right)=\frac{2}{3}M_0\hat{a}_z$$

۲. فضای بین $0<z<d$ از ماده‌ای که ضریب نفوذ مغناطیسی آن به طور خطی از μ_0 در $z=0$ تا $3\mu_0$ در $z=d$ تغییر می‌کند پر شده است. اگر میدان مغناطیسی در بیرون ماده و در فضای آزاد $H_1=2\hat{a}_x-\hat{a}_y+3\hat{a}_z$ باشد چگالی سطحی جریان مغناطیسی در $z=d$ را بیابید؟

حل:

$$\mu(z)=a+bz \qquad \mu(z=0)=a+b(0)=\mu_0 \Rightarrow a=\mu_0$$

$$\mu(z=d)=a+b(d)=3\mu_0=\mu_0+bd \Rightarrow b=\frac{2\mu_0}{d}$$

$$\mu(z)=\mu_0\left(1+\frac{2}{d}z\right) \qquad \mu_0 H_{n1}=\mu_0\left(1+\frac{2}{d}z\right)H_{n2} \Rightarrow H_{n2}=H_{z2}=\frac{d}{d+2z}H_{z1}$$

$$\Rightarrow H_{n2}=\frac{3d}{d+2z} \xrightarrow{\text{از طرفی}} H_{t2}=H_{t1} \Longrightarrow H_2=2\hat{a}_x-\hat{a}_y+\frac{3d}{d+2z}\hat{a}_z$$

$$M=(\mu_r-1)\vec{H}_2=\frac{2}{d}z\left[2\hat{a}_x-\hat{a}_y+\frac{3d}{d+2z}\hat{a}_z\right]\longrightarrow$$

$$M=\frac{4z}{d}\hat{a}_x-\frac{2z}{d}\hat{a}_y+\frac{6z}{d+2z}\hat{a}_z \Rightarrow J_{ms}(z=d)=\vec{M}\times\hat{a}_z(z=d)=-4\hat{a}_y-6\hat{a}_x$$

۳. میدان مغناطیسی ثابت $H = H_0 \hat{a}_z$ در فضای لایتناهی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ برقرار شده است. کره‌ای فرومغناطیسی به شعاع a و با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_1 را در این فضا قرار می‌دهیم. میدان مغناطیسی داخل این کره را بدست آورید؟

حل: با توجه به اینکه هیچ جریانی وجود ندارد $\Leftarrow$ $J=0$ است $\Leftarrow$ $\nabla \times H = 0$ است

$\Rightarrow H = -\vec{\nabla} V_m$ $\longrightarrow$ که V_m پتانسیل اسکالر مغناطیسی است

از این مرحله می‌توان دقیقاً به مانند الکتریسیته ساکن عمل کرد.

$$\Rightarrow H_0 \hat{a}_z = -\frac{\partial V_m}{\partial z}\hat{a}_z \Rightarrow V_m = -H_0 z = -H_0 R\cos\theta$$

این پتانسیل پایه یا پتانسیل در خارج کره در $r \to \infty$ یکی باشد زیرا در بی‌نهایت از کره اثر کره روی پتانسیل قابل اغماض است. $\Leftarrow$

$$V_m^{in} = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n R^n + \cancel{B_n R^{-(n+1)}})P_n(\cos\theta)$$

$$V_m^{out} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(A'_n R^n + B'_n R^{-(n+1)})P_n(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} V_m^{out} = \lim_{r\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(A'_n R^n + B'_n R^{-(n+1)})P_n(\cos\theta) = -H_0 R\cos\theta$$

$$\Rightarrow A'_1 = -H_0 \quad , \quad n=1 \quad , \longrightarrow V_m^{(out)} = \left[-H_0 R + \frac{B'_1}{R^2}\right]\cos\theta \qquad R>a$$

از طرفی $V_m^{in} = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n R^n]P_n[\cos\theta]$

حال با داشتن پتانسیل در داخل و خارج کره می‌توان میدان مغناطیسی در داخل و خارج را بدست آورد

$$H^{in} = -\nabla V_m^{(in)} = -\frac{\partial V_m^{in}}{\partial R}\hat{a}_R - \frac{1}{R}\frac{\partial V_m^{in}}{\partial\theta}\hat{a}_\theta = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}[-A_n n R^{n-1}]P_n(\cos\theta)\right\}\hat{a}_R + \left\{\sum_{n=0}^{\infty}[-A_n R^{n-1}]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right\}\hat{a}_\theta$$

و

$$H^{out} = -\vec{\nabla} V_m^{out} = -\frac{\partial V_m^{out}}{\partial R}\hat{a}_R - \frac{1}{R}\frac{\partial V_m^{out}}{\partial\theta}\hat{a}_\theta = \left[H_0 + \frac{2B'_1}{R^3}\right]\cos\theta\,\hat{a}_R + \left[-H_0 + \frac{B'_1}{R^3}\right]\sin\theta\,\hat{a}_\theta$$

ادامه صفحه بعد

حال شرایط مرزی پیوستگی مؤلفه مماسی میدان مغناطیسی و مؤلفه نرمال چگالی شار مغناطیسی را به صورت زیر می‌نویسیم و ضرایب مجهول را بدست می‌آوریم:

$$H_\theta^{in}(R=a) = H_\theta^{(0)}(R=a)$$

$$\Rightarrow \left[-A_n a^{n-1}\right]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} = \left[-H_0 + \frac{B_1'}{a^3}\right]\sin\theta$$

$$\mu_1 H_R^{in}(R=a) = \mu_2 H_R^{(out)}(R=a) \Rightarrow$$

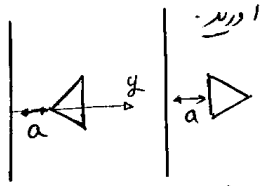
$$\mu_1\left[-A_n n a^{n-1}\right]P_n(\cos\theta) = \mu_2\left[H_0 + \frac{2B_1'}{a^3}\right]\cos\theta$$

$$n=1 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -H_0 + \dfrac{B_1'}{a^3} \\ -A_1 = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\left[H_0 + \dfrac{2B_1'}{a^3}\right] \end{cases}$$

از حل ۲ معادله دو مجهول بالا خواهیم داشت $\Leftarrow \quad A_1 = \dfrac{-3\mu_0}{\mu_1+2\mu_2}H_0$

$$H^{in} = \left[-A_1\cos\theta\,\hat{a}_R + A_1\sin\theta\,\hat{a}_\theta\right] = -A_1\hat{a}_z = \frac{3\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}H_0\,\hat{a}_z$$

۴. اگر ضریب القاء متقابل بین سیم مستقیم طویل و مثلث‌های متساوی الاضلاع به ضلع a در شکل الف M_1 و در شکل ب M_2 باشد در این صورت نسبت $\frac{M_2}{M_1}$ را بدست آورید.



(الف) (ب)

حل: برای شکل الف) $H = \dfrac{I}{2\pi y} \longrightarrow$ میدان سیم مستقیم

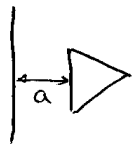
$$\Rightarrow \varphi = \int_S B\cdot ds \longrightarrow = 2\int_0^{a+a\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\frac{1}{\sqrt{3}}(y-a)\,dy$$

$$\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{3}}\left[a\frac{\sqrt{3}}{2} - a\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu_0 a}{\pi\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

ادامه در صفحه بعد

برای شکل (ب)



$$\varphi = 2\int_0^{a+a\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-y+a+a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dy$$

$$\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{3}}\left[-a\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(a+a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$M_2 = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu_0 a}{\pi\sqrt{3}}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

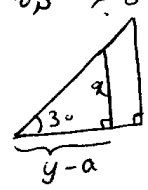
$$\Rightarrow \frac{M_2}{M_1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(1+\sqrt{3}/2\right)\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

(حالت الف)

* در این مثال روش محاسبه $\int B\,ds$ برای φ بسیار مهم است.

$$\varphi = \int_0^{a+a\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{\frac{y-a}{\sqrt{3}}} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\,dx\,dy$$

x وابسته به y است

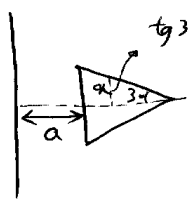


$$tg\,30 = \frac{x}{y-a} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}(y-a)$$

(حالت ب)

$$\varphi = \int_0^{a+a\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{\left(a+a\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\,dx\,dy$$

x وابسته به y است.



$$tg\,30 = \frac{x}{a+a\frac{\sqrt{3}}{2}-y}$$

۵. حلقه‌ای به شعاع a در صفحه $z=0$ قرار دارد و مرکز آن مبدأ مختصات می‌باشد. حلقه دیگری که شعاع آن b می‌باشد ($b \ll a$) در بالای این حلقه طوری قرار گرفته که مرکز آن روی محور z و به فاصله h از مرکز حلقه اول قرار دارد. اگر خط عمود بر حلقه بالایی با محور z زاویه 60 درجه بسازد ضریب القاء متقابل بین ۲ حلقه را بدست آورید؟

حل:

چون حلقه بالایی کوچک است میدان مغناطیسی در سرتاسر آن با میدان مغناطیسی در مرکز آن که روی محور حلقه پایینی قرار دارد یکسان است. اما میدان در روی محور حلقه پایینی در فاصله h یعنی در مرکز حلقه بالایی اگر دارای جریان I باشد برابر است با:

$$H = \frac{I a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\,\hat{a}_z$$

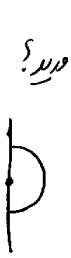
⇐ شار عبوری از حلقه بالایی عبارتست از:

$$\varphi = B\cdot S = BS\cos\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\pi b^2 \cos 60^\circ = \frac{\mu I a^2}{4(a^2+h^2)^{3/2}}\pi b^2$$

$$\Rightarrow L_{12} = \frac{\varphi_{12}}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{4(a^2+h^2)^{3/2}}$$

۶. در شکل زیر ضریب القاء متقابل بین سیم مستقیم طویل و نیم دایره به شعاع a را بدست آورید؟



حل:

اگر نقطه A را که در مختصات کروی به صورت $(R,\varphi,0)$ بیان می‌شود در نظر بگیریم در اینصورت میدان مغناطیسی ناشی از سیم مستقیم حامل جریان I در این نقطه برابر است با: $H = \frac{I}{2\pi r\cos\varphi}$ در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از نیم دایره برابر است با:

$$\varphi = \int \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r\cos\varphi}\, r\,dr\,d\varphi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left\{ \ln\frac{1+\tan 0.5\varphi}{1-\tan 0.5\varphi}\right\}_0^{\pi}$$

ادامه صفحه بعد

اما با حد انتگرال داده شده پاسخ نامعین می‌شود زیرا $\tan 0.5\varphi$ در $\varphi=\pi$ برابر $-\infty$ می‌شود. لذا چون شار عبوری از $\frac{1}{8}$ دایره 0.25 شار عبوری از یک نیم دایره است پس شار عبوری از $\frac{1}{8}$ یعنی $\varphi=45^\circ$ را محاسبه می‌کنیم و در 4 ضرب می‌کنیم تا شار عبوری از نیم دایره بدست آید

$$\Rightarrow \varphi_{12} = 4\times\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left\{\ln\frac{1+\tan 0.5\varphi}{1-\tan 0.5\varphi}\right\}_0^{45^\circ}$$

$$= \frac{2\mu_0 I a}{\pi}\ln\frac{1+\tan 22.5^\circ}{1-\tan 22.5^\circ} = \frac{1.76\,\mu_0 I a}{\pi}$$

$$\Rightarrow L_{12} = \frac{\varphi_{12}}{I} = \frac{1.76\,\mu_0 a}{\pi}$$

۷. N دور سیم‌پیچ به دور یک هسته به طول 20 سانتی‌متر ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_r پیچیده شده است اگر با ایجاد شکاف هوایی یک میلی‌متری در هسته، ضریب خودالقائی سیم‌پیچ نصف شود مقدار تقریبی μ_r چقدر است؟

حل: اگر طول هسته را l و سطح مقطع آن را S بگیریم در این حالت ضریب خودالقا هسته با محاسبات زیر بدست می‌آید:

$$\varphi = \frac{NI}{R} = \frac{NI}{\frac{l}{\mu_0\mu_r S}} = \frac{NI\mu_0\mu_r S}{l}$$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{N\varphi}{I} = \frac{N^2\mu_0\mu_r S}{l}$$

ضریب خودالقاء هسته بعد از ایجاد شکاف هوایی به طول l_0 را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\varphi = \frac{NI}{R+R_0} = \frac{NI}{\frac{l-l_0}{\mu_0\mu_r S}+\frac{l_0}{\mu_0 S}} = \frac{NI}{l+l_0(\mu_r-1)} \Rightarrow L_2 = \frac{N\varphi}{I} = \frac{N^2\mu_0\mu_r S}{l+l_0(\mu_r-1)}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{l+l_0(\mu_r-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow l_0(\mu_r-1)=1 \Rightarrow \mu_r = \frac{1}{l_0}+1$$

$$= \frac{20}{0.1}+1 = 201$$

۸ . دو حلقه دایره‌ای به شعاع خیلی کوچک که مرکز یکی در مبداء و مرکز دومی در $(0,0,30^\circ)$ قرار دارد را در نظر بگیرید اگر حلقه دوم به موازات محور z تغییر مکان داده و در صفحه $z=0$ قرار گیرد ضریب القا متقابل بین ۲ حلقه چند برابر می‌شود؟

حل: میدان در مرکز حلقه دوم همان میدان ناشی از ۲ قطبی مغناطیسی است. بنابراین ضریب القا متقابل بین ۲ حلقه را به روش زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\varphi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi R^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_R + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right)\cdot \pi a^2 \hat{a}_z$$

$$= \frac{\mu_0 \pi I a^4}{4(2)^3}\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow L_{12} = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{32}\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

در حالت اول $\theta = 30^\circ$ و در حالت دوم $\theta = 90^\circ$ بنابراین داریم:

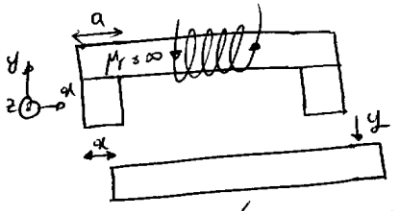
$$(L_{12})_{\text{در حالت اول}} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{32}\left(2\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ\right) = \frac{5\mu_0 \pi a^4}{128}$$

$$(L_{12})_{\text{در حالت دوم}} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{32}\left(2\cos^2 90^\circ - \sin^2 90^\circ\right) = \frac{\mu_0 \pi a^4}{32}$$

$$\frac{(L_{12})_{\text{در حالت اول}}}{(L_{12})_{\text{در حالت اول}}} = 0/8$$

---

۹ . در شکل زیر نیروی وارد بر هسته پایین را بدست آورید؟ تعداد دور سیم پیچ N و عمق هسته‌ها در جهت z برابر d می‌باشد.



حل: چون ضریب نفوذپذیری مغناطیسی بی‌نهایت است بنابراین رلوکتانس هسته صفر می‌باشد. و مدار مغناطیسی از یک منبع ولتاژ NI و دو رلوکتانس برای فواصل هوایی تشکیل شده است. رلوکتانس فواصل هوایی برابر است با:

$$R_{01} = \frac{y}{\mu_0 d(a-x)} \quad \text{و} \quad R_{02} = \frac{y}{\mu_0 d a}$$

⇐ شار مغناطیسی عبوری از هسته‌ها برابر است با:

$$\varphi = \frac{NI}{R_{01}+R_{02}} = \frac{NI}{\frac{y}{\mu_0 d(a-x)} + \frac{y}{\mu_0 d a}}$$

ادامه صفحه بعد

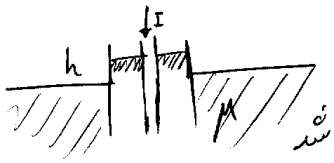
$$\Rightarrow \varphi = \frac{N I \mu_0 d a(a-x)}{2ay - yx} \quad \Rightarrow L = \frac{N\varphi}{I} = \frac{N^2 \mu_0 d a(a-x)}{2ay - yx}$$

حال انرژی مغناطیسی ذخیره شده را بدست می‌آوریم و از روی آن نیروی وارد بر هسته پایینی را بدست می‌آوریم.

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{N^2 \mu_0 d a(a-x)}{2ay - yx} I^2 \Rightarrow F = \nabla W_m = \frac{\partial W_m}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial W_m}{\partial y}\hat{a}_y$$

$$\Rightarrow \quad F = -\frac{1}{2}\frac{N^2 \mu_0 d a^2 I^2}{y(2a-x)}\hat{a}_x - \frac{1}{2}\frac{N^2 \mu_0 d a(a-x) I^2}{y^2(2a-x)}\hat{a}_y$$

10. کابل هم محوری به شعاع داخلی a و خارجی b را در داخل مایع قابل مغناطیس شدن با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ به طور عمودی مطابق شکل وارد می‌کنیم. اگر وزن مخصوص مایع ρ باشد و جریان کابل I باشد ارتفاع h را که مایع بالا می‌آید بدست آورید.



حل: اگر طول کل کابل را L بگیریم و مطابق شکل ارتفاع مایع z باشد آنگاه:

$$\oint H \cdot dl = I \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

$$\Rightarrow W_m = \frac{1}{2}\int_a^b \mu H^2 2\pi r z\, dr + \frac{1}{2}\int_a^b \mu_0 H^2 2\pi r (L-z)\, dr$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_a^b \mu \frac{z I^2 dr}{2\pi r} + \frac{1}{2}\int_a^b \mu_0 \frac{I^2 dr}{2\pi r}(L-z)$$

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{\mu}{2\pi} I^2 z \ln\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{2\pi} I^2 (L-z)\ln\frac{b}{a}$$

$$W_m = \frac{z}{4\pi} I^2 (\mu-\mu_0)\ln\frac{b}{a} + \frac{\mu_0}{4\pi} L I^2 \ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow f_z = \frac{dW_m}{dz} = \frac{(\mu-\mu_0) I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a} = \text{وزن مایع جابجا شده} = \pi(b^2-a^2) h \rho g$$

$$h = \frac{(\mu-\mu_0) I^2}{4\pi^2 (b^2-a^2)\rho g}\ln\frac{b}{a}$$

تمرین سری الکترومغناطیس شرایط مرزی + خرایت خودالقایی و القای متقابل

۱. یک کره به شعاع a به طور دائم با بردار مغناطیس شوندگی $\vec{M}=M_0\hat{a}_z$ مغناطیس شده است. میدان مغناطیسی در مرکز کره را بدست آورید.

حل: چگالی حجمی جریان های مغناطیسی صفر است زیرا $\vec{\nabla}\times\vec{M}=0$ اما چگالی سطحی جریان عبارتست از:

$$J_{ms}=\vec{M}\times\hat{a}_r = M_0\,\hat{a}_z\times\hat{a}_r = M_0\sin\theta\,\hat{a}_\varphi$$

اگر نوار دایره‌ای به شعاع r و به فاصله h از مرکز کره در نظر بگیریم میدان ناشی از آن عبارتست از:

$$dH=-\frac{dI\,r^2\hat{a}_z}{2(r^2+h^2)^{3/2}}=\frac{(M_0\sin\theta)(a\,d\theta)(a^2\sin^2\theta)}{2a^3}\hat{a}_z$$

$$dH=\frac{M_0\sin^3\theta\,d\theta}{2}\hat{a}_z \longrightarrow H=\int_0^{\pi}\frac{M_0}{2}\sin^3\theta\,d\theta\,\hat{a}_z$$

$$\vec{H}=\frac{M_0}{2}\hat{a}_z\left(\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(3\sin\theta-\sin 3\theta)\,d\theta\right)=\frac{M_0}{2}\hat{a}_z\left(2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)\right)=\frac{2}{3}M_0\hat{a}_z$$

۲. فضای بین $0<z<d$ از ماده‌ای که ضریب نفوذ مغناطیسی آن به طور خطی از μ_0 در $z=0$ تا $3\mu_0$ در $z=d$ تغییر می‌کند پر شده است. اگر میدان مغناطیسی در بیرون ماده و در فضای آزاد $H_1=2\hat{a}_x-\hat{a}_y+3\hat{a}_z$ باشد چگالی سطحی جریان مغناطیسی در $z=d$ را بیابید؟

حل:

$$\mu(z)=a+bz \qquad \mu(z=0)=a+b(0)=\mu_0 \Rightarrow a=\mu_0$$

$$\mu(z=d)=a+b(d)=3\mu_0=\mu_0+bd \Rightarrow b=\frac{2\mu_0}{d}$$

$$\mu(z)=\mu_0\left(1+\frac{2}{d}z\right) \qquad \mu_0 H_{n1}=\mu_0\left(1+\frac{2}{d}z\right)H_{n2} \Rightarrow H_{n2}=H_{z2}=\frac{d}{d+2z}H_{z1}$$

$$\Rightarrow H_{n2}=\frac{3d}{d+2z} \xRightarrow{\text{از طرفی}} H_{t1}=H_{t2} \Longrightarrow H_2=2\hat{a}_x-\hat{a}_y+\frac{3d}{d+2z}\hat{a}_x$$

$$M=(\mu_r-1)\vec{H}_2=\frac{2}{d}z\left[2\hat{a}_x-\hat{a}_y+\frac{3d}{d+2z}\hat{a}_z\right]\longrightarrow$$

$$M=\frac{4z}{d}\hat{a}_x-\frac{2z}{d}\hat{a}_y+\frac{6z}{d+2z}\hat{a}_z \Rightarrow J_{ms}(z=d)=\vec{M}\times\hat{a}_z(z=d)=-4\hat{a}_y-\hat{a}_x$$

۳. میدان مغناطیسی ثابت $H = H_0 \hat{a}_z$ در فضای لایتناهی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ برقرار شده است. کره‌ای فرومغناطیسی به شعاع a و با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_1 را در این فضا قرار می‌دهیم. میدان مغناطیسی داخل این کره را بدست آورید؟

حل: با توجه به اینکه هیچ جریانی وجود ندارد $\Leftarrow$ $J=0$ است $\Leftarrow$ $\nabla \times H = 0$ است

$\Rightarrow H = -\vec{\nabla} V_m$ $\longrightarrow$ که V_m پتانسیل اسکالر مغناطیسی است

از این مرحله می‌توان دقیقاً به مانند الکتریسیته ساکن عمل کرد.

$$\Rightarrow H_0 \hat{a}_z = -\frac{\partial V_m}{\partial z}\hat{a}_z \Rightarrow V_m = -H_0 z = -H_0 R\cos\theta$$

این پتانسیل پایه یا پتانسیل در خارج کره در $r \to \infty$ یکی باشد زیرا در بی‌نهایت از کره اثر کره روی پتانسیل قابل اغماض است. $\Leftarrow$

$$V_m^{in} = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n R^n + \cancel{B_n R^{-(n+1)}})P_n(\cos\theta)$$

$$V_m^{out} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(A'_n R^n + B'_n R^{-(n+1)})P_n(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} V_m^{out} = \lim_{r\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(A'_n R^n + B'_n R^{-(n+1)})P_n(\cos\theta) = -H_0 R\cos\theta$$

$$\Rightarrow A'_1 = -H_0 \quad , \quad n=1 \quad , \longrightarrow V_m^{(out)} = \left[-H_0 R + \frac{B'_1}{R^2}\right]\cos\theta \qquad R>a$$

از طرفی $V_m^{in} = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n R^n]P_n[\cos\theta]$

حال با داشتن پتانسیل در داخل و خارج کره می‌توان میدان مغناطیسی در داخل و خارج را بدست آورد

$$H^{in} = -\nabla V_m^{(in)} = -\frac{\partial V_m^{in}}{\partial R}\hat{a}_R - \frac{1}{R}\frac{\partial V_m^{in}}{\partial\theta}\hat{a}_\theta = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}[-A_n n R^{n-1}]P_n(\cos\theta)\right\}\hat{a}_R + \left\{\sum_{n=0}^{\infty}[-A_n R^{n-1}]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right\}\hat{a}_\theta$$

و

$$H^{out} = -\vec{\nabla} V_m^{out} = -\frac{\partial V_m^{out}}{\partial R}\hat{a}_R - \frac{1}{R}\frac{\partial V_m^{out}}{\partial\theta}\hat{a}_\theta = \left[H_0 + \frac{2B'_1}{R^3}\right]\cos\theta\,\hat{a}_R + \left[-H_0 + \frac{B'_1}{R^3}\right]\sin\theta\,\hat{a}_\theta$$

ادامه صفحه بعد

حال شرایط مرزی پیوستگی مؤلفه مماسی میدان مغناطیسی و مؤلفه نرمال چگالی شار مغناطیسی را به صورت زیر می‌نویسیم و ضرایب مجهول را بدست می‌آوریم:

$$H_\theta^{in}(R=a) = H_\theta^{(0)}(R=a)$$

$$\Rightarrow \left[-A_n a^{n-1}\right]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} = \left[-H_0 + \frac{B_1'}{a^3}\right]\sin\theta$$

$$\mu_1 H_R^{in}(R=a) = \mu_2 H_R^{(out)}(R=a) \Rightarrow$$

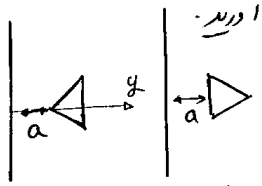
$$\mu_1\left[-A_n n a^{n-1}\right]P_n(\cos\theta) = \mu_2\left[H_0 + \frac{2B_1'}{a^3}\right]\cos\theta$$

$$n=1 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -H_0 + \dfrac{B_1'}{a^3} \\ -A_1 = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\left[H_0 + \dfrac{2B_1'}{a^3}\right] \end{cases}$$

از حل ۲ معادله دو مجهول بالا خواهیم داشت $\Leftarrow \quad A_1 = \dfrac{-3\mu_0}{\mu_1+2\mu_2}H_0$

$$H^{in} = \left[-A_1\cos\theta\,\hat{a}_R + A_1\sin\theta\,\hat{a}_\theta\right] = -A_1\hat{a}_z = \frac{3\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}H_0\,\hat{a}_z$$

۴. اگر ضریب القاء متقابل بین سیم مستقیم طویل و مثلث‌های متساوی الاضلاع به ضلع a در شکل الف M_1 و در شکل ب M_2 باشد در این صورت نسبت $\frac{M_2}{M_1}$ را بدست آورید.



(الف) (ب)

حل: برای شکل الف) $H = \dfrac{I}{2\pi y} \longrightarrow$ میدان سیم مستقیم

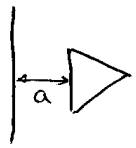
$$\Rightarrow \varphi = \int_S B\cdot ds \longrightarrow = 2\int_0^{a+a\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\frac{1}{\sqrt{3}}(y-a)\,dy$$

$$\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{3}}\left[a\frac{\sqrt{3}}{2} - a\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu_0 a}{\pi\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

ادامه در صفحه بعد

برای شکل (ب)



$$\varphi = 2\int_0^{a+a\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-y+a+a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dy$$

$$\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{3}}\left[-a\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(a+a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$M_2 = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu_0 a}{\pi\sqrt{3}}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

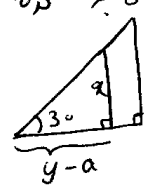
$$\Rightarrow \frac{M_2}{M_1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(1+\sqrt{3}/2\right)\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

(حالت الف)

* در این مثال روش محاسبه $\int B\,ds$ برای φ بسیار مهم است.

$$\varphi = \int_0^{a+a\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{\frac{y-a}{\sqrt{3}}} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\,dx\,dy$$

x وابسته به y است

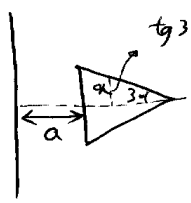


$$tg\,30 = \frac{x}{y-a} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}(y-a)$$

(حالت ب)

$$\varphi = \int_0^{a+a\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{\left(a+a\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\,dx\,dy$$

x وابسته به y است.



$$tg\,30 = \frac{x}{a+a\frac{\sqrt{3}}{2}-y}$$

۵. حلقه‌ای به شعاع a در صفحه $z=0$ قرار دارد و مرکز آن مبدأ مختصات می‌باشد. حلقه دیگری که شعاع آن b می‌باشد ($b \ll a$) در بالای این حلقه طوری قرار گرفته که مرکز آن روی محور z و به فاصله h از مرکز حلقه اول قرار دارد. اگر خط عمود بر حلقه بالایی با محور z زاویه 60 درجه بسازد ضریب القاء متقابل بین ۲ حلقه را بدست آورید؟

حل:

چون حلقه بالایی کوچک است میدان مغناطیسی در سرتاسر آن با میدان مغناطیسی در مرکز آن که روی محور حلقه پایینی قرار دارد یکسان است. اما میدان در روی محور حلقه پایینی در فاصله h یعنی در مرکز حلقه بالایی اگر دارای جریان I باشد برابر است با:

$$H = \frac{I a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\,\hat{a}_z$$

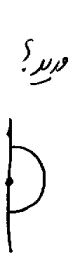
⇐ شار عبوری از حلقه بالایی عبارتست از:

$$\varphi = B\cdot S = BS\cos\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\pi b^2 \cos 60^\circ = \frac{\mu I a^2}{4(a^2+h^2)^{3/2}}\pi b^2$$

$$\Rightarrow L_{12} = \frac{\varphi_{12}}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{4(a^2+h^2)^{3/2}}$$

۶. در شکل زیر ضریب القاء متقابل بین سیم مستقیم طویل و نیم دایره به شعاع a را بدست آورید؟



حل:

اگر نقطه A را که در مختصات کروی به صورت $(R,\varphi,0)$ بیان می‌شود در نظر بگیریم در اینصورت میدان مغناطیسی ناشی از سیم مستقیم حامل جریان I در این نقطه برابر است با: $H = \frac{I}{2\pi r\cos\varphi}$ در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از نیم دایره برابر است با:

$$\varphi = \int \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r\cos\varphi}\, r\,dr\,d\varphi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left\{ \ln\frac{1+\tan 0.5\varphi}{1-\tan 0.5\varphi}\right\}_0^{\pi}$$

ادامه صفحه بعد

اما با حد انتگرال داده شده پاسخ نامعین می‌شود زیرا $\tan 0.5\varphi$ در $\varphi=\pi$ برابر $-\infty$ می‌شود. لذا چون شار عبوری از $\frac{1}{8}$ دایره 0.25 شار عبوری از یک نیم دایره است پس شار عبوری از $\frac{1}{8}$ یعنی $\varphi=45^\circ$ را محاسبه می‌کنیم و در 4 ضرب می‌کنیم تا شار عبوری از نیم دایره بدست آید

$$\Rightarrow \varphi_{12} = 4\times\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left\{\ln\frac{1+\tan 0.5\varphi}{1-\tan 0.5\varphi}\right\}_0^{45^\circ}$$

$$= \frac{2\mu_0 I a}{\pi}\ln\frac{1+\tan 22.5^\circ}{1-\tan 22.5^\circ} = \frac{1.76\,\mu_0 I a}{\pi}$$

$$\Rightarrow L_{12} = \frac{\varphi_{12}}{I} = \frac{1.76\,\mu_0 a}{\pi}$$

۷. N دور سیم‌پیچ به دور یک هسته به طول 20 سانتی‌متر ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_r پیچیده شده است اگر با ایجاد شکاف هوایی یک میلی‌متری در هسته، ضریب خودالقائی سیم‌پیچ نصف شود مقدار تقریبی μ_r چقدر است؟

حل: اگر طول هسته را l و سطح مقطع آن را S بگیریم در این حالت ضریب خودالقا هسته با محاسبات زیر بدست می‌آید:

$$\varphi = \frac{NI}{R} = \frac{NI}{\frac{l}{\mu_0\mu_r S}} = \frac{NI\mu_0\mu_r S}{l}$$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{N\varphi}{I} = \frac{N^2\mu_0\mu_r S}{l}$$

ضریب خودالقاء هسته بعد از ایجاد شکاف هوایی به طول l_0 را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\varphi = \frac{NI}{R+R_0} = \frac{NI}{\frac{l-l_0}{\mu_0\mu_r S}+\frac{l_0}{\mu_0 S}} = \frac{NI}{l+l_0(\mu_r-1)} \Rightarrow L_2 = \frac{N\varphi}{I} = \frac{N^2\mu_0\mu_r S}{l+l_0(\mu_r-1)}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{l+l_0(\mu_r-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow l_0(\mu_r-1)=1 \Rightarrow \mu_r = \frac{1}{l_0}+1$$

$$= \frac{20}{0.1}+1 = 201$$

۸ . دو حلقه دایره‌ای به شعاع خیلی کوچک که مرکز یکی در مبداء و مرکز دومی در $(0,0,30^\circ)$ قرار دارد را در نظر بگیرید اگر حلقه دوم به موازات محور z تغییر مکان داده و در صفحه $z=0$ قرار گیرد ضریب القا متقابل بین ۲ حلقه چند برابر می‌شود؟

حل: میدان در مرکز حلقه دوم همان میدان ناشی از ۲ قطبی مغناطیسی است. بنابراین ضریب القا متقابل بین ۲ حلقه را به روش زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\varphi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi R^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_R + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right)\cdot \pi a^2 \hat{a}_z$$

$$= \frac{\mu_0 \pi I a^4}{4(2)^3}\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow L_{12} = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{32}\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

در حالت اول $\theta = 30^\circ$ و در حالت دوم $\theta = 90^\circ$ بنابراین داریم:

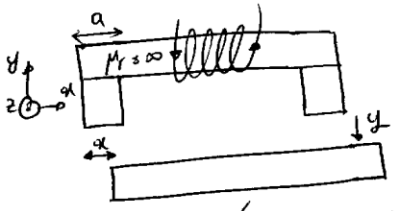
$$(L_{12})_{\text{در حالت اول}} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{32}\left(2\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ\right) = \frac{5\mu_0 \pi a^4}{128}$$

$$(L_{12})_{\text{در حالت دوم}} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{32}\left(2\cos^2 90^\circ - \sin^2 90^\circ\right) = \frac{\mu_0 \pi a^4}{32}$$

$$\frac{(L_{12})_{\text{در حالت اول}}}{(L_{12})_{\text{در حالت اول}}} = 0/8$$

---

۹ . در شکل زیر نیروی وارد بر هسته پایین را بدست آورید؟ تعداد دور سیم پیچ N و عمق هسته‌ها در جهت z برابر d می‌باشد.



حل: چون ضریب نفوذپذیری مغناطیسی بی‌نهایت است بنابراین رلوکتانس هسته صفر می‌باشد. و مدار مغناطیسی از یک منبع ولتاژ NI و دو رلوکتانس برای فواصل هوایی تشکیل شده است. رلوکتانس فواصل هوایی برابر است با:

$$R_{01} = \frac{y}{\mu_0 d(a-x)} \quad \text{و} \quad R_{02} = \frac{y}{\mu_0 d a}$$

⇐ شار مغناطیسی عبوری از هسته‌ها برابر است با:

$$\varphi = \frac{NI}{R_{01}+R_{02}} = \frac{NI}{\frac{y}{\mu_0 d(a-x)} + \frac{y}{\mu_0 d a}}$$

ادامه صفحه بعد

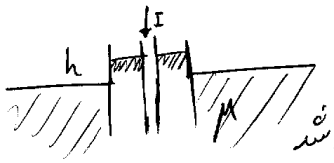
$$\Rightarrow \varphi = \frac{N I \mu_0 d a(a-x)}{2ay - yx} \quad \Rightarrow L = \frac{N\varphi}{I} = \frac{N^2 \mu_0 d a(a-x)}{2ay - yx}$$

حال انرژی مغناطیسی ذخیره شده را بدست می‌آوریم و از روی آن نیروی وارد بر هسته پایینی را بدست می‌آوریم.

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{N^2 \mu_0 d a(a-x)}{2ay - yx} I^2 \Rightarrow F = \nabla W_m = \frac{\partial W_m}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial W_m}{\partial y}\hat{a}_y$$

$$\Rightarrow \quad F = -\frac{1}{2}\frac{N^2 \mu_0 d a^2 I^2}{y(2a-x)}\hat{a}_x - \frac{1}{2}\frac{N^2 \mu_0 d a(a-x) I^2}{y^2(2a-x)}\hat{a}_y$$

10. کابل هم محوری به شعاع داخلی a و خارجی b را در داخل مایع قابل مغناطیس شدن با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ به طور عمودی مطابق شکل وارد می‌کنیم. اگر وزن مخصوص مایع ρ باشد و جریان کابل I باشد ارتفاع h را که مایع بالا می‌آید بدست آورید.



حل: اگر طول کل کابل را L بگیریم و مطابق شکل ارتفاع مایع z باشد آنگاه:

$$\oint H \cdot dl = I \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

$$\Rightarrow W_m = \frac{1}{2}\int_a^b \mu H^2 2\pi r z\, dr + \frac{1}{2}\int_a^b \mu_0 H^2 2\pi r (L-z)\, dr$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_a^b \mu \frac{z I^2 dr}{2\pi r} + \frac{1}{2}\int_a^b \mu_0 \frac{I^2 dr}{2\pi r}(L-z)$$

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{\mu}{2\pi} I^2 z \ln\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{2\pi} I^2 (L-z)\ln\frac{b}{a}$$

$$W_m = \frac{z}{4\pi} I^2 (\mu-\mu_0)\ln\frac{b}{a} + \frac{\mu_0}{4\pi} L I^2 \ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow f_z = \frac{dW_m}{dz} = \frac{(\mu-\mu_0) I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a} = \text{وزن مایع جابجا شده} = \pi(b^2-a^2) h \rho g$$

$$h = \frac{(\mu-\mu_0) I^2}{4\pi^2 (b^2-a^2)\rho g}\ln\frac{b}{a}$$